Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

SERVICE DES CONCOURS ET EXAMENS

ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION DE 1984

Mathématiques II

TOUTES OPTIONS

Samedi 12 mai 1984, de 14 heures à 18 heures

ATTENTION! La présentation, l'écriture et l'orthographe ont leur part dans la note.

Soit a un élément de $\mathbb{R}_+$.

I. On désigne par E_a l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant à la relation de récurrence :

(1) $\quad 4u_{n+3} = 4(1+a)u_{n+2} - (1+4a)u_{n+1} + u_n \quad$ où $n \in \mathbb{N}$.

1. a) Montrer que E_a est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

b) En considérant l'application de E_a dans $\mathbb{R}^3$ qui à toute suite u associe (u_0,u_1,u_2), calculer la dimension de E_a.

2. a) Vérifier que l'espace vectoriel K des suites constantes est inclus dans E_a.

b) Soit u un élément de E_a. On considère la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :

$$v_n = u_{n+1} - u_n \qquad \text{où } n \in \mathbb{N}.$$

Etablir une relation de récurrence (2) satisfaite par v, reliant v_{n+2}, v_{n+1} et v_n.

c) On désigne par F_a l'ensemble des suites réelles satisfaisant à la relation (2). Montrer que F_a est un sous-espace vectoriel de E_a.

Déterminer une base de F_a. On sera amené à distinguer trois cas : $0 \leqslant a < 1$, $a = 1$, $a > 1$.

Dans le premier cas, on posera $a = \cos\theta$, avec $0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$; dans le dernier cas, on posera $a = \operatorname{ch}\theta$, avec $\theta > 0$.

d) Montrer qu'il existe une valeur a_0 de a et une seule, que l'on calculera, pour laquelle K est inclus dans F_a.

e) On suppose que $a \neq a_0$. Montrer que E_a est somme directe de K et de F_a. En déduire, dans chacun des trois cas envisagés au c), une base de E_a.

f) Montrer que E_{a_0} contient la suite de terme général $u_n = n$. En déduire une base de E_{a_0}.

3. Soit u l'élément de E_a déterminé par les conditions initiales :

$$u_0 = 1 - \sqrt{|a^2-1|} \qquad u_1 = 1 \qquad u_2 = 1 + \frac{1}{4}\sqrt{|a^2-1|}.$$

Calculer u_n en fonction de n. (On discutera suivant la valeur de a.)

Etudier la convergence de u, et calculer la limite de cette suite, lorsqu'elle existe.

II. On désigne par $M_3(C)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients complexes et par I_3 la matrice unité de $M_3(C)$.

On donne la matrice carrée suivante, considérée comme élément de $M_3(C)$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -a-\frac{1}{4} & a+1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de M :

$$\delta_M(X) = \det(XI_3 - M).$$

Calculer les valeurs propres, réelles ou complexes, de la matrice M. Lorsque $a \neq 1$, on exprimera ces valeurs propres à l'aide du nombre θ introduit dans la partie I.

2. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la matrice M est diagonalisable sur le corps C. Lorsque M est diagonalisable, trouver une matrice carrée inversible P telle que la matrice $D = P^{-1}MP$ soit diagonale. Expliciter D.

3. Pour tout polynôme $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ on pose $Q(M) = \sum_{k=0}^{n} a_k M^k$ avec la convention $M^0 = I_3$.

On admettra que, pour tout couple (Q_1,Q_2) de polynômes, $(Q_1Q_2)(M) = Q_1(M)\,Q_2(M)$; on admettra aussi que $\delta_M(M) = 0$.

Soit n un nombre entier naturel. Montrer qu'il existe un triplet $(\alpha_n,\beta_n,\gamma_n)$ de nombres réels et un seul tel que :

$$M^n = \alpha_n M^2 + \beta_n M + \gamma_n I_3.$$

Expliciter ce triplet dans chacun des cas $a = \frac{5}{4}$ et $a = 1$.

Dans ces deux cas, retrouver le résultat de la question I 3.